2 Základní poznatky o číselných oborech

> Mnozí lidé jsou nevědomí jen proto, že vycházejí z pojmů, které jsou podle matematických měřítek nepřesné (Sokrates)

2.1 Přirozená čísla

Přirozená čísla označují počet prvků konečných množin. Každé přirozené číslo je tak jakousi abstrakcí společné vlastnosti všech konečných množin, mezi kterými existuje vzájemně jednoznačné zobrazení. Množinu všech přirozených čísel značíme $\mathbb{N}$.

Poznámka: Číslo nula lze považovat za „počet prvků" prázdné množiny, nula je tedy v tomto pojetí přirozeným číslem. V některých konstrukcích nula do množiny všech přirozených čísel nepatří. Pro naše potřeby však bude výhodnější nulu za přirozené číslo považovat.

Používání čísel vyžaduje zavedení **početních operací**, jimiž ke dvěma číslům přiřazujeme předepsaným způsobem číslo třetí jako výsledek. Základními a všeobecně známými operacemi jsou sčítání a násobení. **Sečítáním** přiřazujeme dvěma **sčítancům součet** (píšeme $a+b=c$), **násobením** pak dvěma **činitelům součin** (píšeme $a \cdot b = d$). Přirozená čísla lze **sčítat a násobit neomezeně**, tj. ke každým dvěma přirozeným číslům existuje součet i součin – a jsou to opět přirozená čísla. Říkáme, že množina $\mathbb{N}$ je uzavřená vzhledem ke sčítání a násobení.

Pro každá tři přirozená čísla a,b,c platí:

$a+b=b+a$,	$a \cdot b = b \cdot a$	(komutativní zákon)
$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot b\cdot c$,	$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$	(asociativní zákon)
$a\cdot(b+c)=(b+c)\cdot a=a\cdot b+a\cdot c$		(distributivní zákon)

Opakované násobení týmž číslem většinou zapisujeme ve tvaru mocniny, např.
$a\cdot a\cdot a\cdot a=a^4$, kde číslo a nazýváme základ a číslo 4 mocnitel (exponent). Je zřejmě $a^1=a$.
a dále pro $a>0$ definujeme $a^0=1$.

Přirozené číslo a, pro které je $a\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, nazýváme cifrou (číslicí).
Běžný číslicový (ciferný) zápis čísla v desítkové soustavě je úsporný zápis součtu, např.:

<u>ciferný zápis</u> $27\ 035 = 2\cdot10^4+7\cdot10^3+0\cdot10^2+3\cdot10+5$ <u>rozvinutý zápis.</u>

Zápis přirozeného čísla v desítkové soustavě: jsou–li $a_n;a_{n-1};...;a_2;a_1;a_0$ cifry, píšeme

<u>ciferný zápis</u> $a_na_{n-1}...a_2a_1a_0=10^na_n+10^{n-1}a_{n-1}+...10^2a_2+10^1a_1+10^0a_0$ <u>rozvinutý zápis.</u>

K součtu a součinu se zavádějí operace inverzní – odčítání a dělení. **Odčítáním** přiřazujeme **menšenci a menšiteli rozdíl**: Rozdílem čísel a,b (v tomto pořadí) je číslo x, pro které platí $b+x=a$. Zapisujeme $x=a-b$. **Dělením** přiřazujeme **dělenci a děliteli podíl**: Podílem čísel a,b (v tomto pořadí) je číslo x, pro které platí $b\cdot x=a$. Zapisujeme $x=a:b$, popř. $x=\frac{a}{b}$.
Odčítání a dělení nelze v množině všech přirozených provádět neomezeně (tj. rozdíl, resp. podíl dvou přirozených čísel nemusí být vždy přirozené číslo). Pro rozdíl platí $a-b\in\mathbb{N}\Leftrightarrow a\ge b$, pro podíl jsou pravidla složitější.

Násobek a dělitel: Číslo a je násobkem čísla b (číslo b je dělitelem čísla a) právě tehdy, když existuje přirozené číslo k takové, že $a = k \cdot b$. Skutečnost, že b je dělitelem čísla a vyjadřujeme slovy „a je dělitelné b„ nebo „b dělí a„, zapisujeme b/a (např. $5/35$).

Každé přirozené číslo je dělitelné jedničkou a sebou samým, tyto dva dělitele se nazývají **samozřejmí dělitelé**. Přirozená čísla, která mají pouze samozřejmé dělitele, se nazývají **prvočísla**, ostatní přirozená čísla jsou **čísla složená**. Nulu a jedničku nepovažujeme ani za prvočísla ani za čísla složená. Při určování dělitelů používáme tzv. znaky dělitelností: Číslo $a \in \mathbb{N}$ je dělitelné

dvěma	$\Leftrightarrow$	končí na $0, 2, 4, 6, 8$
třemi	$\Leftrightarrow$	jeho ciferný součet je dělitelný třemi
čtyřmi	$\Leftrightarrow$	jeho poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi
pěti	$\Leftrightarrow$	končí na $0, 5$.
osmi	$\Leftrightarrow$	jeho poslední trojčíslí je dělitelné osmi
devíti	$\Leftrightarrow$	jeho ciferný součet je dělitelný devíti.

Rozklad čísel na prvočinitele: Každé přirozené číslo lze rozložit na součin prvočísel, a to (až na pořadí činitelů) jediným způsobem.

1. Příklad: rozložme na součin prvočísel číslo $415\,800$.

Řešení:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\boxed{415\,800} & 207\,900 & 103\,950 & 51\,975 & 17\,325 & 5\,775 & 1\,925 & 385 & 77 & 11 \\
:\downarrow\ =\nearrow & :\downarrow\ =\nearrow & :\downarrow\ =\nearrow & :\downarrow\ =\nearrow & :\downarrow\ =\nearrow & :\downarrow\ =\nearrow & :\downarrow\ =\nearrow & :\downarrow\ =\nearrow & :\downarrow\ =\nearrow & \\
2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 7 & 11
\end{array}
$$

tedy

$$415\,800 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$

2. Příklad – ukázka přímého důkazu:
Dokažme větu: Pro každé přirozené číslo n platí: je–li n sudé (tj. dělitelné dvěma), pak n^2 je také sudé.
Důkaz: provedeme přímo (viz předchozí kapitolu):
n je sudé $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k \Rightarrow n^2 = 2 \cdot 2k^2 \Rightarrow n^2$ je sudé.

3. Příklad – ukázka nepřímého důkazu:
Dokažme větu: Pro každé přirozené číslo n platí: je–li n^2 sudé, pak n je také sudé.
Důkaz: provedeme nepřímo, podle předchozí kapitoly tedy musíme dokázat větu „není–li n sudé, pak není sudé ani n^2":
n je liché $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2+k)+1 \Rightarrow n^2$ je liché
– zde jsme si dovolili „předběhnout" vzoreček $(A+B)^2$, který najdete na str. 41.

Poznámka: Věty z příkladů 2 a 3 jsou obecné věty tvaru implikace, přitom věta z příkladu 3 je větou obrácenou k větě z příkladu 2. Obě věty tak můžeme vyslovit jako jedinou obecnou větu ve tvaru ekvivalence: Pro každé přirozené číslo n platí: číslo n je sudé právě tehdy, když je sudé číslo n^2. Věty tvaru ekvivalence, tj. $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, je třeba dokazovat „oběma směry", tj. je třeba dokázat jak $A(x) \Rightarrow B(x)$, tak $B(x) \Rightarrow A(x)$.

Společný dělitel: společným dělitelem dvou přirozených čísel $n_1; n_2$ je číslo, které dělí obě čísla $n_1; n_2$. Největší společný dělitele čísel $n_1; n_2$ značíme $NSD(n_1; n_2)$. **Společným násobkem** dvou přirozených čísel $n_1; n_2$ je číslo, které je dělitelné oběma čísly $n_1; n_2$. Nejmenší společný násobek čísel $n_1; n_2$ značíme $nsn(n_1; n_2)$. Přirozená čísla nazýváme **nesoudělná**, je–li jejich společným dělitelem pouze číslo jedna. V opačném případě je nazýváme **soudělná**.

Určování největšího společného dělitele: Největší společný dělitel $NSD(n_1; n_2)$ dvou přirozených čísel $n_1; n_2$ má ve svém rozkladu všechny společné prvočinitele rozkladů čísel $n_1; n_2$ umocněné na nejmenší exponent, který se v těchto rozkladech vyskytuje, např.:

$$\left.\begin{array}{l} 5\,940 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^0 \cdot 11 \\ 7\,056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^2 \cdot 11^0 \end{array}\right\} \Rightarrow NSD(5\,940\,;\,7\,056) = 2^2 \cdot 3^2 = 36\ .$$

Určování nejmenšího společného násobku: Nejmenší společný násobek $nsn(n_1; n_2)$ dvou přirozených čísel $n_1; n_2$ má ve svém rozkladu všechny prvočinitele, kteří se vyskytují alespoň v jednom z rozkladů čísel $n_1; n_2$ umocněné na nejvyšší exponent, který se v těchto rozkladech vyskytuje, např.:

$$\left.\begin{array}{l} 5\,940 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^0 \cdot 11 \\ 7\,056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^2 \cdot 11^0 \end{array}\right\} \Rightarrow nsn(5\,940\,;\,7\,056) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 = 1\,164\,240\,.$$

Pro každá dvě přirozená čísla $n_1; n_2$ platí: $n_1 \cdot n_2 = NSD(n_1; n_2) \cdot nsn(n_1; n_2)$, např.:

$$5\,940 \cdot 7\,056 = 36 \cdot 1\,164\,240 = 41\,912\,640\,.$$

Příklady:

4. Náměstí tvaru obdélníka o rozměrech $36\,m$, $48\,m$ má být po obvodu osazeno stejně vzdálenými pouličními lampami. Kolik lamp nejméně bude potřeba, když ve všech rozích náměstí již lampy jsou?
Řešení: Obě strany obdélníka musí být dělitelné hledanou vzdáleností lamp, vzdálenost tedy najdeme jako největšího společného dělitele daných rozměrů. Protože $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $48 = 2^4 \cdot 3$, je $NSD(36, 48) = 2^2 \cdot 3 = 12$. Vzdálenost mezi lampami bude tedy $12\,m$. Na kratší straně náměstí budou tedy potřeba celkem $36:12+1=4$ lampy, z nich dvě jsou již instalovány, je tedy potřeba instalovat $a=2$ lampy. Podobně na delší straně je třeba instalovat $b = 48:12+1-2=3$ lampy. Na celé náměstí pak $o = 2\cdot(a+b) = 2\cdot(2+3) = 10$ lamp.

5. Autobus A jezdí po 20 minutách, autobus B po 24 minutách, autobus C po 36 minutách. V 7.00 hod. vyjely autobusy ze zastávky společně. Kdy nastane nejbližší další společný odjezd?
Řešení: Interval mezi společnými odjezdy je nejmenším společným násobkem intervalů jednotlivých linek. Protože $20 = 2^2 \cdot 5$; $24 = 2^3 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$, je

$$nsn(20, 24, 36) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360\,.$$

Nejbližší společný odjezd bude tedy za šest hodin, tj. ve 13.00 hod.

Neřešené úlohy:

1) Rozložte na součin prvočísel: a) 26 460 b) 30 800 c) 54 450 d) 128 700

2) Určete největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel
a) $540;\ 504$ **b)** $825;\ 3\,630$ **c)** $6\,600;\ 29\,106$

3) Místnost tvaru obdélníka o stranách $a = 252\ cm$; $b = 396\ cm$ má být vydlážděna čtvercovými dlaždicemi. Určete největší rozměry dlaždic tak, aby žádnou nebylo třeba řezat. (šířku spáry zanedbejte).

4) Soukolí se skládá ze dvou ozubených kol o počtu zubů $a = 300$, $b = 315$. Na každém kole je jeden vadný zub. Jestliže se tyto zuby setkají, soukolí se zasekne. Kolik otáček nejvýše mohou obě kola udělat?

5) Na čtvercovém záhoně o straně $a = 720\ cm$ bylo vysázeno 90 stromků rybízu do sponu $90\ cm \times 80\ cm$. Poté bylo rozhodnuto, že spon musí být $120\ cm \times 120\ cm$
a) Kolik stromků můžeme ponechat na původním místě?
b) Kolik stromků je třeba na tomto záhoně znovu zasadit?
c) Kolik stromků je třeba přesadit na jiný záhon?

Výsledky:

1) a) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ **b)** $2^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ **c)** $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2$ **d)** $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13$ **2) a)** 36 **;** 7 560 **b)** 165 **;** 18 150 **c)** 66 **;** 2 910 600 **3)** 36 cm 4) Kolo a 21 otáček, kolo b 20 otáček **5) a)** 12 **b)** 37 **c)** 41

2. 2 Celá čísla

Celá čísla jsou čísla, která lze zapsat ve tvaru rozdílu dvou přirozených čísel. Množinu všech celých čísel značíme $\mathbb{Z}$, platí tedy: $\mathbb{Z} = \{x \in \Omega \mid (x = a - b) \wedge (a; b \in \mathbb{N})\}$. Rozdíl přirozených čísel $0 - b$ značíme $-b$. Pro každé celé číslo existuje nekonečně mnoho uspořádaných dvojic [menšenec, menšitel] přirozených čísel, jejichž rozdílem je toto číslo, např.:

$$-3 \in \mathbb{Z} : -3 = 0 - 3 = 1 - 4 = 3 - 6 = \ldots. \qquad 5 \in \mathbb{Z} : 5 = 0 - 5 = 1 - 6 = 3 - 8 = \ldots.$$

Množina všech přirozených čísel je vlastní podmnožinou množiny všech celých čísel ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$). Celé číslo $a \in \mathbb{Z}$, pro které je zároveň $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$ značíme někdy podrobněji $+a$. Tato čísla nazýváme **kladná**. Čísla, která nejsou kladná a jsou různá od nuly, nazýváme **záporná**. Číslo nula není ani kladné ani záporné. Přirozená čísla nazýváme někdy celá **nezáporná**, záporná čísla včetně nuly pak celá **nekladná**.

Na množině všech celých čísel lze neomezeně sčítat a násobit (viz str. 22), ale i odčítat (množina $\mathbb{Z}$ je uzavřená vzhledem ke sčítání, násobení a odčítání). Pro sčítání a násobení celých čísel platí komutativní, asociativní a distributivní zákon (viz přirozená čísla).

Navíc platí:

$$(+a) + (+b) = a + b \qquad (+a) \cdot (+b) = (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

$$(-a) + (+b) = -a + b = b - a \qquad (-a) \cdot (+b) = (+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$$

$$(+a) + (-b) = (+a) - (+b) = a - b = -b + a \qquad (+a) : (+b) = (-a) : (-b) = a : b$$

$$(-a) + (-b) = (-a) - (+b) = -a - b \qquad (-a) : (+b) = (+a) : (-b) = -a : b$$

$$(-a) - (-b) = -a + b = b - a$$

Příklady:

1) $(-35)+(-7)=(-35)-(+7)=-35-7=-42$ **4)** $(-8)\cdot 4=8\cdot(-4)=-8\cdot 4=-32$

2) $(-35)-(-7)=(-35)+(+7)=-35+7=-28$ **5)** $(-3)\cdot(-5)=3\cdot 5=15$

3) $(-24):6=24:(-6)=-24:6=-4$ **6)** $(-35):(-7)=35:7=5$

7) $(-2)\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-1)=[(-2)\cdot(-1)]\cdot[(-3)\cdot(-2)]\cdot[(-1)\cdot(-2)]\cdot(-1)=$
$=2\cdot 6\cdot 2\cdot(-1)=24\cdot(-1)=-24$

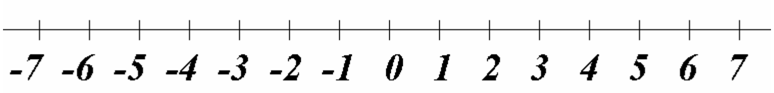
Celá čísla $c,d\in\mathbb{Z}$ nazýváme navzájem **opačná** právě tehdy, když $c+d=0$. Jsou–li $c,d\in\mathbb{Z}$ čísla navzájem opačná, pak platí $c=-d$, $d=-c$,

Absolutní hodnota $|a|$ čísla kladného je a, čísla záporného je $-a$, absolutní hodnota nuly je nula.

Uspořádání množiny všech celých čísel je dáno těmito pravidly:

- libovolné nezáporné číslo je větší než libovolné záporné
- libovolné nekladné číslo je menší než libovolné kladné
- ze dvou kladných čísel je větší to, které má větší absolutní hodnotu
- ze dvou záporných čísel je **větší** to, které má **menší absolutní hodnotu**.

Číselná osa celých čísel: Vznikne zobrazením (celé) **množiny** $\mathbb{Z}$ **do množiny všech bodů** libovolné **přímky** p



Geometrický význam absolutní hodnoty: Absolutní hodnota celého čísla je rovna vzdálenosti jeho obrazu od obrazu čísla nula na číselné ose.

Ze dvou celých čísel $a\neq b$ je pak větší to, jehož obraz leží na číselné ose vpravo.

Vlastnosti absolutní hodnoty: Pro každá dvě čísla $a,b\in\mathbb{Z}$ platí:

$|a|\geq 0;\ |a|=0\Leftrightarrow a=0$ $\qquad |a-b|=|b-a|$

$|-a|=|a|$ $\qquad |a|+|b|\geq|a\pm b|\geq|a|-|b|$

Neřešené úlohy:

Vypočtěte:

1) $(-3)\cdot 4\cdot 10$

2) $(-4)\cdot 8\cdot(-1)$

3) $(-1)\cdot(-5)\cdot(-1)$

4) $(-2)\cdot 0\cdot(-4)$

5) $2\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot 11$

6) $(-1)\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-2)$

7) $18-15\cdot 2$

8) $15-32:2$

9) $44:4-16:8$

10) $6\cdot(-9)-32:4$

11) $5-\{-3\cdot[2\cdot 6-2+(3-8\cdot 2)]\}-9\cdot 5$

12) $\{8-[3+6\cdot 4-(-20)\cdot 2]-4-(-3)\}\cdot 4+7$

Výsledky

1) -120 **2)** 32 **3)** -5 **4)** 0 **5)** 66 **6)** 4 **7)** -22 **8)** -1 **9)** 3 **10)** -62 **11)** -97 **12)** -233

2.3 Racionální čísla

Racionální čísla jsou čísla, která lze zapsat ve tvaru podílu dvou celých čísel. Množinu všech racionálních čísel značíme $\mathbb{Q}$, platí tedy: $\mathbb{Q} = \{x \in \Omega \mid (x = a:b) \wedge (a;b \in \mathbb{Z}) \wedge (b \neq 0)\}$.

Podíl celých čísel $a:b$; $b \neq 0$ značíme $\frac{a}{b}$. Tento zápis nazýváme **zlomkem**, číslo a je **čitatel**, číslo b je **jmenovatel** zlomku. Pro každé racionální číslo existuje nekonečně mnoho uspořádaných dvojic celých čísel [dělenec, dělitel], jejichž podílem je dané racionální číslo, resp. nekonečně mnoho zlomků [čitatel, jmenovatel], které vyjadřují totéž racionální číslo, např.:

$[2;5] \in \mathbb{Q}$, protože $2:5 = 4:10 = 6:15 = 20:50 = ...$, resp. $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{20}{50} = ...$

Mezi těmito zlomky vždy existuje jediný, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná čísla – říkáme, že tento zlomek je v **základním tvaru**.

Množina všech celých čísel je vlastní podmnožinou množiny všech racionálních čísel ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$). Na množině všech racionálních čísel lze neomezeně sečítat, násobit, odčítat a dělit (s jedinou výjimkou – nelze dělit nulou).

Zápisy racionálních čísel ve tvaru zlomku: Nechť $a;b;k$ jsou libovolná celá čísla, $b,k \neq 0$. Pak platí $\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}$ (tuto úpravu nazýváme rozšiřování zlomku). Nechť a,b jsou libovolná soudělná celá čísla, k jejich společný dělitel. Pak platí: $\frac{a}{b} = \frac{a:k}{b:k}$ (tuto úpravu nazýváme krácení zlomku). Mezi všemi zlomky, které vyjadřují totéž racionální číslo, existuje právě jeden, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná čísla. Říkáme, že zlomek je zapsán v základním tvaru.

Zápis racionálních čísel ve tvaru desetinného čísla: Nechť $a_0 \in \mathbb{Z}$ libovolné celé číslo, $a_1;a_2;...;a_{n-2};a_{n-1};a_n$ cifry (tj. $a_i \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$; $i = 1;2;..;n$) a $a \in \mathbb{Q}$ je libovolné racionální číslo, pro které platí:

$$a = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n} \quad \text{(rozvinutý ukončený desetinný zápis).}$$

Pak píšeme $\quad a = a_0, a_1a_2...a_{n-1}a_n \quad$ (ukončený desetinný rozvoj).

Převod zlomku na desetinné číslo provedeme „naznačeným" dělením, např: $\frac{3}{8} = 3:8 = 0,375$. Existují však racionální čísla, která nelze zapsat ukončeným desetinným zápisem, např: $\frac{1}{3} = 0.33333.....$; $\frac{14}{37} = 0.378378378......$ V těchto případech je desetinný zápis **nekonečný**, avšak vždy v něm existuje skupina číslic, která se pravidelně opakuje (tzv. **perioda**). Před touto periodou se může vyskytovat jiná skupina číslic (**předperioda**). Např. v zápisu čísla $\frac{5}{12} = 0.41666666.....$ je předperioda 41, perioda 6. Periodu obvykle píšeme jen jednou a označujeme ji pruhem, tj. zapisujeme $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$; $\frac{14}{37} = 0,\overline{378}$; $\frac{5}{12} = 0,41\overline{6}$. Tyto zápisy nazýváme periodické desetinné rozvoje.

Každé racionální číslo lze vyjádřit ve tvaru ukončeného nebo periodického rozvoje. Přitom délka periody je vždy menší, než jmenovatel původního zlomku. Je to dáno tím, že při dělení jmenovatelem $b \in \mathbb{N}$ můžeme obdržet nejvýše b různých zbytků: $0,1,2,...,b-1$. Obdržíme–li nulu, dělení a tím i rozvoj čísla končí. Při nekonečném dělení se tedy mohou vystřídat nejvýše zbytky $1,2,...,b-1$ a pak se zbytky a tudíž i cifry v rozvoji nutně musí opakovat. Například při vyjádření zlomku $\frac{1}{7}$ dostaneme všech šest možných zbytků v pořadí $3,2,6,4,5,1$ a $\frac{1}{7}=0,\overline{142857}$.

Zápis racionálního čísla ve tvaru zlomku: V případě ukončeného desetinného rozvoje najdeme zlomek vhodným „rozšířením“, např. $0,437=0,437\cdot\frac{1000}{1000}=\frac{437}{1000}$. Postup v případě periodického rozvoje ilustruje následující příklad:

1. Příklad: Převeďme na zlomek racionální číslo $a=0,123\overline{4567}$. Číslo má trojcifernou předperiodu a čtyřcifernou periodu. „Zbavíme“ se jich následujícím obratem: Vynásobíme dané rovnosti čísly $10^{3+4}=10^7$ a 10^4. Takto získané dvě rovnosti od sebe odečteme:

$$\begin{array}{rcr} 10\,000\,000\,a & = & 1\,234\,567{,}4567\,4567.... \\ -1\,000\,a & = & -123{,}4567\,4567.... \\ \hline 9\,999\,000a & = & 1\,234\,444{,}0000\,0000.... \end{array}$$

Dostáváme tedy $$a=\frac{1\,234\,444}{9\,999\,000}=\frac{308\,611}{2\,499\,750}.$$

Absolutní hodnota racionálního čísla, **opačná čísla**, **číselná osa** a **uspořádání** množiny všech racionálních čísel je definováno analogicky jako pro čísla celá. Sčítání a násobení racionálních čísel má stejné vlastnosti jako sčítání a násobení přirozených resp. celých čísel, navíc platí:

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d<b\cdot c \qquad \frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right| \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

$$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b} \qquad c\cdot\frac{a}{b}=\frac{c}{1}\cdot\frac{a}{b}=\frac{c\cdot a}{b} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Pozor! Zřejmě pod dojmem vzorce $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ studenti někdy občas používají i „vzorce“:

časté chyby:

$$\cancel{c\cdot\frac{a}{b}=\frac{c\cdot a}{c\cdot b}}; \qquad \cancel{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+b}{c+d}}; \qquad \cancel{\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}$$

Při sčítání a odčítání často nemusíme použít vzorec $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, ale tzv. převod na nejmenší společný jmenovatel, což je nejmenší společný násobek jmenovatelů, kteří se v součtu resp. v rozdílu vyskytují. Tedy např.

místo $\frac{1}{24}+\frac{1}{36}=\frac{36+24}{24\cdot 36}=\frac{60}{864}=\frac{15}{216}$ počítáme lépe $\frac{1}{24}+\frac{1}{36}=\frac{9+6}{216}=\frac{15}{216}$.

Příklady:

1) $1.2\cdot 0.5-0.4^2:\frac{2}{25}+0.3=0.6-0.16\cdot\frac{25}{2}+0.3=0.6-0.08\cdot 25+0.3=0.6-2+0.3=-1.1$

2) $\frac{1}{4}-\left[\frac{2}{6}-2\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{4\cdot 1-4\cdot 8+3\cdot 1}{12}=\frac{1}{4}+\frac{25}{12}=\frac{3+25}{12}=\frac{28}{12}=\frac{7}{3}$

3) $\dfrac{2\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{2\cdot\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+0.2}=\dfrac{\frac{11}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{6}{4}-\frac{6}{5}+\frac{1}{5}}=\dfrac{\frac{3\cdot 11-4\cdot 2}{12}}{\frac{5\cdot 3-2\cdot 6+2\cdot 1}{10}}=\dfrac{\frac{33-8}{12}}{\frac{15-12+2}{10}}=\dfrac{\frac{25}{12}}{\frac{5}{10}}=\frac{25}{12}\cdot\frac{10}{5}=\frac{25}{6}=4\frac{1}{6}$

4) $\dfrac{\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{3}{5}\right)}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+0.7\cdot\frac{2}{3}}=\dfrac{\frac{-2+1}{6}:\left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3}}=\dfrac{\frac{-1}{6}:\left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{9}+\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{-1}{6}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{\frac{4}{9}+\frac{7}{15}}=\dfrac{\frac{5}{18}}{\frac{5\cdot 4+3\cdot 7}{45}}=$

$$=\dfrac{\frac{5}{18}}{\frac{41}{45}}=\frac{5\cdot 45}{18\cdot 41}=\frac{5\cdot 5}{2\cdot 41}=\frac{25}{82}$$

Neřešené úlohy:

Vypočtěte:

1) $7.5+2\frac{1}{2}\cdot\left(1\frac{2}{3}:2.5-3\right)$

2) $3.2:320+0.5^3\cdot 10-(3-0.2\cdot 0.4)$

3) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)\cdot 0.3-\left(-1.4+\frac{2}{5}\right)^2$

4) $1.2:0.8+\frac{4}{9}\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)^2-0.4\cdot 0.8$

5) $\left(\frac{8}{15}-1\frac{7}{10}+\frac{1}{6}\right)\cdot 0.3+1.5$

6) $\left(2\frac{1}{3}-2.5\right):\frac{5}{6}+1.2^2$

7) $\left[0.7:(-0.2)^2\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

8) $1.5^3+0.08:0.2-[(-3)^2:(-3)]$

9) $\left[-1\frac{1}{2}-\left(-1\frac{7}{8}\right)\right]:0.2$

10) $\left[-2\cdot(-3.75)-8\frac{3}{4}\right]^2\cdot 100$

11) $(-2+5)^2-(-2)^3\cdot 0.2\cdot 5$

12) $\frac{4}{7}\cdot 1.4+0.6^3:0.036-\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)$

13) $\dfrac{\frac{2}{7}-\frac{1}{2}}{3-\frac{3}{4}}$

14) $\dfrac{\frac{1}{5}-\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{4}\right)}{\frac{2}{5}:\left(-\frac{1}{3}\right)}$

15) $\dfrac{2\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{2\cdot\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+0.2}$

16) $\dfrac{\frac{2}{5}\cdot 0.5+\left(\frac{1}{4}\right)^2:\frac{3}{8}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)}$

17) $\dfrac{\left(\frac{3}{7}-1\frac{1}{2}\right):\frac{3}{8}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)}$

18) $\dfrac{\left[\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\right]:\left(-\frac{3}{5}\right)}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+0.7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)}$

Zapište jako desetinné číslo:

19) $-\dfrac{16}{25}$ **20)** $\dfrac{1}{3}$ **21)** $\dfrac{10}{33}$ **22)** $\dfrac{28}{165}$ **23)** $\dfrac{1}{7}$

Zapište jako zlomek v základním tvaru:

24) 0.32 **25)** $0.\overline{6}$ **26)** $0.\overline{63}$ **27)** $0.126\overline{32}$ **28)** $0.\overline{9}$

Výsledky

1) $1\dfrac{2}{3}$ **2)** -1.66 **3)** -0.92 **4)** 2.5 **5)** 1.2 **6)** 1.24 **7)** $-8\dfrac{3}{4}$ **8)** -5.225 **9)** $1\dfrac{7}{8}$

10) 156.25 **11)** 17 **12)** 7.15 **13)** $-\dfrac{2}{21}$ **14)** $-\dfrac{1}{8}$ **15)** $-4\dfrac{1}{6}$ **16)** $-5\dfrac{1}{2}$ **17)** 45 **18)** $\dfrac{25}{82}$

19) $-0,64$ **20)** $0.\overline{3}$ **21)** $0.\overline{30}$ **22)** $0.1\overline{69}$ **23)** $0.\overline{142857}$ **24)** $\dfrac{8}{25}$ **25)** $\dfrac{2}{3}$ **26)** $\dfrac{7}{11}$

27) $\dfrac{6\ 253}{49\ 500}$ **28)** 1

2.4 Reálná čísla

Číselná osa racionálních čísel: Vznikne zobrazením (celé) **množiny** $\mathbb{Q}$ **do množiny všech bodů** libovolné **přímky** p. Je otázkou, zda toto zobrazení je také zobrazení **na množinu**, tj. zda každý bod číselné osy je obrazem nějakého racionálního čísla. Mezi každými dvěma (jakkoli „blízkými“) racionálními čísly leží vždy alespoň jedno další racionální číslo. Mezi čísly $a < b$ leží např. vždy jejich arimetrický průměr, tj. $a < \dfrac{a+b}{2} < b$. Racionální čísla tedy zaplňují číselnou osu velmi „hustě“ a mohlo by se zdát, že ji „zaplní zcela“. Ovšem není tomu tak.

1. Příklad: Dokažme, že číslo $\sqrt{2}$ není racionální.
Řešení: Jedná se o individuální větu (viz kpt. 1.5.), kterou dokážeme sporem. Dle kpt. 1.5. je tedy třeba předpokládat platnost negace dokazované věty a řetězem implikací z ní vyvodit nepravdivý výrok (viz kpt. 1.5. typ důkazu c).

Předpokládejme tedy, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo $\Rightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z}, m,n$ nesoudělná : $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$

$\Rightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z}, m,n$ nesoudělná : $\sqrt{2}n = m$

$\Rightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z}, m,n$ nesoudělná : $2n^2 = m^2$ *

$\Rightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z}, m,n$ nesoudělná : m^2 je sudé

(následující implikaci jsme dokázali v kpt. 2.1. př.3):

$\Rightarrow \exists m,n \in \mathbb{Z}, m,n$ nesoudělná : m je sudé

$\Rightarrow \exists m,n,k \in \mathbb{Z}, m,n$ nesoudělná, m sudé: $m = 2k$

$\Rightarrow \exists m,n,k \in \mathbb{Z}, m,n$ nesoudělná, m sudé: $m^2 = 4k^2$

$\Rightarrow \exists m,n,k \in \mathbb{Z}, m,n$ nesoudělná, m sudé: $2n^2 = 4k^2$ (viz implikaci označenou hvězdičkou)

$\Rightarrow \exists m,n,k \in \mathbb{Z}, m,n$ nesoudělná, m sudé: $n^2 = 2k^2$

$\Rightarrow \exists m,n,k \in \mathbb{Z}, m,n$ nesoudělná, m sudé: n^2 sudé (a konečně viz kpt. 2.1. př.3):

$\Rightarrow \exists m,n,k \in \mathbb{Z} : m,n$ nesoudělná, m sudé, n sudé

Poslední výrok je však nepravdivý. Dospěli jsme ke sporu s předpokladem, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo. Tento předpoklad tedy nemůže platit a $\sqrt{2}$ musí být číslo iracionální.

Řada čísel, se kterými se běžně setkáváme, nejsou čísla racionální. Čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, $0.1010010001...$ nelze zapsat ve tvaru zlomku, nejsou to racionální čísla.

Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je číselná množina, kterou lze zobrazit **na množinu** všech bodů přímky. Každému reálnému číslu x je tak přiřazen právě jeden bod P ležící na přímce a naopak, každému bodu Q přímky p je přiřazeno právě jedno reálné číslo y. Přímku p nazýváme **číselnou osou**. Je–li bodu P přiřazeno číslo x, nazýváme toto číslo **souřadnicí bodu** P, píšeme $P=[x]$.

Podmnožinou množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel. Reálná čísla, která nejsou racionální, nazýváme **čísla iracionální.** Tato čísla lze vyjádřit nekonečným a neperiodickým desetinným rozvojem, tj. rozvojem s nekonečně mnoha ciframi, v němž se žádná skupina cifer pravidelně neopakuje. Je samozřejmé, že nikdy nemůžeme vypsat všechny cifry desetinného rozvoje, kterým je určeno iracionální číslo. K určení iracionálního čísla je však třeba znát předpis, podle kterého je principiálně možné zjistit, která cifra je na n–tém místě jeho desetinného rozvoje, a to pro libovolné n.

V množině všech iracionálních čísel nelze neomezeně provádět žádnou aritmetickou operaci – součet, rozdíl, součin ani podíl dvou iracionálních čísel nemusí být iracionální číslo.

Příklady: $\sqrt{2}+\left(1-\sqrt{2}\right)=1$; $\pi-\pi=0$; $\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$; $(3\pi):\pi=3$.

V množině $\mathbb{R}$ všech reálných čísel lze neomezeně sečítat, odčítat, násobit i dělit (s výjimkou nuly).

Interval – je podmnožina množiny $\mathbb{R}$, kterou je možné zobrazit na přímku, polopřímku nebo úsečku (případně s výjimkou jednoho nebo obou krajních bodů).
Intervaly množiny $\mathbb{R}$:

Název	Značení	Definice Množina všech $x\in\mathbb{R}$, pro která platí	Grafické znázornění
Uzavřený	$\langle a;b\rangle$	$a\le x\le b$	
Otevřený	$(a;b)$	$a<x<b$	
Uzavřený zleva	$\langle a;b)$	$a\le x<b$	
Uzavřený zprava	$(a;b\rangle$	$a<x\le b$	
Omezený zleva	$\langle a;\infty)$	$a\le x$	
	$(a;\infty)$	$a<x$	
Omezený zprava	$(\infty;b\rangle$	$x\le b$	
	$(\infty;b)$	$x<b$	
Neomezený	$(\infty;\infty)$	$x\in\mathbb{R}$	

Mocniny a odmocniny

Mocniny s přirozeným mocnitelem: Mocninou rozumíme výraz tvaru a^n, kde a je základ mocniny (mocněnec), n je exponent (mocnitel) . Jak již bylo řečeno v kapitole o přirozených číslech, mocnina s přirozeným mocnitelem značí opakované násobení čísla sebou samým, tj.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n\ krát};\ n \in \mathbb{N};\ n > 0\,.$$

Totéž platí i pro mocninu, jejímž základem je reálné číslo, tj. $a \in \mathbb{R}$.

Z definice vyplývá, že ($n \in \mathbb{N}$):

a) $a^1 = a$;

b) $1^n = 1$;

c) $0^n = 0$ ($n > 0$).

d) Je–li $a > 0$, pak $a^n > 0$

e) $a^{2n} > 0$

f) Je–li $a < 0$, pak $a^{2n-1} < 0$

Na základě této definice dále platí:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{m\ krát} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n\ krát} = \underbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{(m+n)\ krát} = a^{m+n}$$

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot ...... \cdot (a \cdot b)}_{n\ závorek} = \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{n\ krát} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot ... \cdot b)}_{n\ krát} = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot ...... \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n\ zlomků} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}^{n\ krát}}{\underbrace{b \cdot b \cdot ... \cdot b}_{n\ krát}} \cdot = \frac{a^n}{b^n};\ b \neq 0$$

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot ...... \cdot a^m}_{n\ krát} = a^{\overbrace{m+m+...+m}^{n\ krát}} = a^{m \cdot n}$$

Tato pravidla platí nejen pro $a \in \mathbb{N}$ (kde základem mocniny je přirozené číslo), ale i pro $a \in \mathbb{R}$ (základem této mocniny může být libovolné reálné číslo, samozřejmě s výjimkou nuly ve jmenovateli).

Dále pro $a \neq 0$; $m > n$ je

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}^{m\ krát}}{\underbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n\ krát}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}^{(m-n)\ krát} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}^{n\ krát}}{\underbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n\ krát}} = \overbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}^{(m-n)\ krát} \cdot \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}^{n\ krát}}{\underbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n\ krát}} = \overbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}^{(m-n)\ krát} = a^{m-n}$$

Příklady:

1) $10^1 = 10$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

3) $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

4) $1^{10} = 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 = 1$

5) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

6) $(-1)^{47} = [(-1) \cdot (-1)] \cdot [(-1) \cdot (-1)] \cdot ... \cdot [(-1) \cdot (-1)] \cdot (-1) = 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot (-1) = -1$

7) $(-1)^{108} = [(-1) \cdot (-1)] \cdot [(-1) \cdot (-1)] \cdot ... \cdot [(-1) \cdot (-1)] = 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 = 1$

8) $(x^2 y^3) \cdot (2xy) = 2 \cdot x \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot y = 2 \cdot x^{1+2} \cdot y^{3+1} = 2x^3 y^4$

9) $(2a^2bc^5)^4 : (ab^2c^3)^2 = (16a^8b^4c^{20}) : (a^2b^4c^6) = 16 \cdot (a^8 : a^2) \cdot (b^4 : b^4) \cdot (c^{20} : c^6) =$

$= 16 \cdot a^{8-2} b^{4-4} c^{20-6} = 16a^6c^{14}$

10) $\frac{ab^3c^6}{x^2yz} \cdot \frac{a^2bx^3}{c^5yz^2} = \frac{(a \cdot a^2) \cdot (b^3 \cdot b) \cdot (c^6 : c^5) \cdot (x^3 : x^2)}{(y \cdot y) \cdot (z \cdot z^2)} = \frac{a^3b^4cx}{y^2z^3}$

Číselné údaje se v technické praxi udávají ve tvaru $a \cdot 10^n$; kde $1 \le a < 10$, např.:

délka Kordiller je $15\ 000\ km = 1.5 \cdot 10^4\, km$

rozloha Kaspického moře je $371\ 000\ km^2 = 3.71 \cdot 10^5\, km^2$

rozloha Sahary je $7\ 750\ 000\ km^2 = 7.75 \cdot 10^6\, km^2$

Mocniny s celočíselným mocnitelem:

Abychom mohli vzorec $a^m : a^n = a^{m-n}$ rozšířit i na případ $m = n$, je třeba zavést $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0 = 1$ (přitom je třeba, aby $a \neq 0$).

Má–li vzorec $a^m : a^n = a^{m-n}$ platit i pro záporné mocnitele, musí platit

$$\frac{1}{a^n} = 1 : a^n = a^0 : a^n = a^{0-n} = a^{-n}$$

Pro záporné celočíselné mocnitele platí všechna dosud odvozená pravidla.

Příklady:

1) $$(-6)^0 - 2 \cdot 4^{-1} - 3 \cdot (-2)^{-3} - 7 \cdot (-4)^{-2} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{(-2)^3} - \frac{7}{(-4)^2} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{7}{16} = \frac{16 - 8 + 3 \cdot 2 - 7}{16} = \frac{7}{16}$$

2) $$\frac{2^{-2} + 2^0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 5 \cdot (-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} = \frac{\frac{1}{2^2} + 1}{\left(\frac{2}{1}\right)^2 - \frac{5}{(-2)^2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4} + 1}{4 - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{16 - 5 + 9}{4}} =$$
$$= \frac{\frac{5}{4}}{\frac{20}{4}} = \frac{5 \cdot 4}{20 \cdot 4} = \frac{1}{4}$$

Odmocniny v oboru reálných čísel:

Odmocňování je „opačným“ početním výkonem než umocňování přirozeným mocnitelem:
Je–li $a^n = b$; $n \in \mathbb{N}$, můžeme naopak psát $a = \sqrt[n]{b}$ (pro $n = 2$ píšeme obvykle jen $a = \sqrt{b}$).
Je–li $a^n = b$ a $b < 0$, pak musí být n liché. Proto např. $\sqrt[n]{-2} \in \mathbb{R}$ pouze pro lichá n.
Odmocnina v oboru reálných čísel musí být definována jednoznačně, tj. nesmí „dávat více výsledků“. Proto je např. $\sqrt[4]{16} = +2$ a nikoli **častá chyba:** $\cancel{\sqrt[4]{16} = \pm 2}$

Pro každé $a \ge 0$ a každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Mocniny s racionálním mocnitelem:

Předpokládáme–li, že $\frac{m}{n} = k \in \mathbb{Z}$ a mají–li platit výše uvedené vztahy, musí být:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^k = \left(\sqrt[n]{a^k}\right)^n = \sqrt[n]{\left(a^k\right)^n} = \sqrt[n]{a^{k \cdot n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Mají–li tyto vztahy platit i pro $\dfrac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$, je třeba definovat:

Pro každé $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q};\ m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}$ je $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Pro mocniny s racionálními mocniteli platí všechny výše uvedené vztahy.

Pravidla pro počítání s odmocninami:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^1} \cdot \sqrt[n]{b^1} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Příklady: **1)** $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 9} = 3 \cdot \sqrt[3]{27} = 3 \cdot 3 = 9$

2) $\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{9}\right) \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{6} = 3 + \sqrt[3]{6}$

Částečné odmocňování:

3) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$;

4) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$

5) $\sqrt{277\,200} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{11} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{11} = 60\sqrt{7}\sqrt{11}$

Usměrňování zlomků je odstraňování odmocniny ze jmenovatele zlomku: Výraz s odmocninou ve jmenovateli je pro další výpočty většinou nevýhodný, proto se ho snažíme ze jmenovatele odstranit:

Příklady: **6)** $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

7) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3 \cdot 3^2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt[3]{3^2}}{3} = \dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{3}$

Dále platí:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Příklad: **8)** $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{81}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{1}{3}$

Konečně platí:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n \cdot p]{a^p} = a^{\frac{p}{n \cdot p}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Příklady:

9) $\sqrt[3]{16 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{16^2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{\left(2^4\right)^2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{2^8 \cdot 2} = \sqrt[6]{2^9} = \left\{\begin{array}{l} 2^{\frac{9}{6}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[2\cdot 3]{2^{3\cdot 3}} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} \end{array}\right\} = 2\sqrt{2}$

10) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^6}}} = \sqrt[24]{x^6} = x^{\frac{6}{24}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$

Shrnutí vzorců pro počítání s mocninami a odmocninami:

Pro všechny přípustné hodnoty platí:

$$\boxed{\begin{array}{lll}
a^m \cdot a^n = a^{m+n} & a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} & \left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n} \\[2ex]
(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n & \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} & \dfrac{1}{a^n} = a^{-n} \\[2ex]
\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} & a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \\[2ex]
 & \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} & \sqrt[n \cdot p]{a^p} = \sqrt[n]{a}
\end{array}}$$

Pozor! Časté chyby: Studenti často používají také tyto „vzorce“

$$\cancel{(a \pm b)^n = a^n \pm b^n} \quad \cancel{a^m \pm a^n = a^{m \pm n}} \quad \cancel{\sqrt[m]{a \pm b} = \sqrt[m]{a} \pm \sqrt[m]{b}} \quad \cancel{a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}} \quad \cancel{\frac{a^m}{a^n} = a^{\frac{m}{n}}}$$

Vyvraťme první z těchto „vzorců“: Vyjdeme z distributivního zákona

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,.$$

Je–li $a = x + y$, dostaneme dosazením

$$(x + y) \cdot (b + c) = (x + y) \cdot b + (x + y) \cdot c$$

a na pravou stranu použijeme opět distributivní zákon:

$$(x + y) \cdot (b + c) = (x + y) \cdot b + (x + y) \cdot c = xb + yb + xc + yc$$

Závorky (dvojčleny) musíme tedy roznásobovat tak, že násobíme každý člen první závorky s každým členem závorky druhé. Pro $(a \pm b)^2$ tedy např. dostáváme:

$$(a \pm b)^2 = (a \pm b) \cdot (a \pm b) = a^2 \pm ab \pm ab + b^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Podobně

$$(a \pm b)^3 = (a \pm b)^2 \cdot (a \pm b) = (a^2 \pm 2ab + b^2) \cdot (a \pm b) = \ldots = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$$

atd.

Pozor! Vzoreček

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(tzv. druhá mocnina dvojčlenu) je třeba rozlišovat od podobně vypadajícího rozdílu čtverců:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

(o správnosti tohoto vztahu se můžeme přesvědčit zpětným roznásobením závorek na pravé straně).

Chybné vzorce můžeme samozřejmě vyvracet jako obecné hypotézy nalezením protipříkladu (viz závěr kpt. 1.5. odst. e): Např „vzorec“ $\sqrt[m]{a \pm b} = \sqrt[m]{a} \pm \sqrt[m]{b}$ nemůže platit, protože např. pro $a = 9$; $b = 16$; $m = 2$

dostáváme $\sqrt[m]{a+b} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$,
zatímco $\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

Neřešené úlohy:

1) $(a^2b)(ab^2)$
2) $(2ab)^3$
3) $(3x^2yz^3)^3$
4) $(5a^mb^n)^2$
5) $(x^3y^pz)^q$
6) $(2x^3y)^2(xy^2z^3)^5$
7) $(a^2bc^5)^4(3ab^2c^3)^2$
8) $(u^{2m}v^n)^2(uv^m)^3$
9) $(a^{x+y}b^{2x})^z(a^zb^x)^y$
10) $(a^3b^{-3}):(a^{-3}b^3)$
11) $(x^2y^3z^{-2}):(x^{-3}y^{-2}z)$
12) $(u^rv^{-2r}w^{-1}):(u^rv^{3r}w^{-2})$
13) $(a^{2x+1}b^{-x-2}):(a^xb^{1-3x})$
14) $(2x^{a+1}y^{b-3}z^{ab})^{a-1}$
15) $[(-x)^{-2n}:(-x)^{-2n-1}]^{-2}$

Částečně odmocněte:

16) $\sqrt{12}$ **17)** $\sqrt{50}$ **18)** $\sqrt{72}$ **19)** $\sqrt{240}$ **20)** $\sqrt{315}$ **21)** $\sqrt{\frac{5}{9}}$ **22)** $\sqrt{\frac{81}{7}}$

Vypočtěte:

23) $\sqrt{\sqrt{2}}$ **24)** $\sqrt[3]{\sqrt{3}}$ **25)** $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$ **26)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$ **27)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}}$ **28)** $\sqrt[3]{50}\sqrt[3]{20}$

Upravte:

29) $b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{3}{4}}$
30) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{9}} \cdot x^{\frac{1}{12}}$
31) $a^{0.3} \cdot a^{-3.4}$
32) $m^{-\frac{1}{2}} \cdot m^{-1} \cdot m^{-0.5}$
33) $a^{-\frac{1}{5}} : a^{-\frac{5}{3}}$
34) $k^{0.25} : k^{-3.5}$

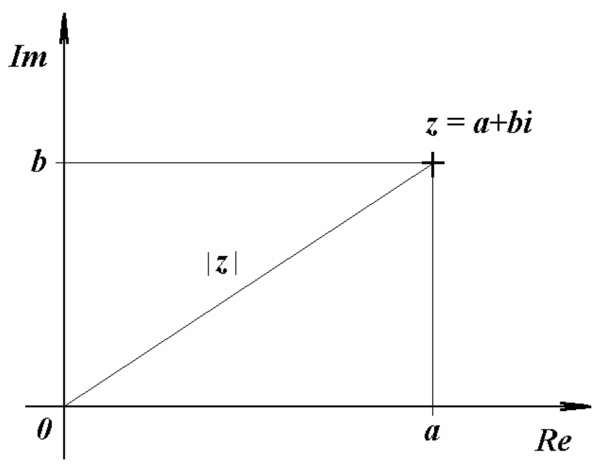
Výsledky:

1) a^3b^3 **2)** $8a^3b^3$ **3)** $27x^6y^3z^9$ **4)** $25a^{2m}b^{2n}$ **5)** $x^{3q}y^{pq}z^q$ **6)** $4x^{11}y^{12}z^{15}$ **7)** $9a^{10}b^8c^{26}$
8) $u^{4m+3}v^{3m+2n}$ **9)** $a^{xz+2yz}b^{2xz+xy}$ **10)** a^6b^{-6} **11)** $x^5y^5z^{-3}$ **12)** $v^{-5r}w$ **13)** $a^{x+1}b^{2x-3}$
14) $2^{a-1}x^{a^2-1}y^{(a-1)(b-3)}z^{ab(a-1)}$ **15)** x^{-2} **16)** $2\sqrt{3}$ **17)** $5\sqrt{2}$ **18)** $6\sqrt{2}$ **19)** $4\sqrt{15}$ **20)** $3\sqrt{35}$
21) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **22)** $\frac{9}{\sqrt{7}}$ **23)** $\sqrt[4]{2}$ **24)** $\sqrt[6]{3}$ **25)** $\sqrt[9]{3}$ **26)** $\sqrt[4]{3}$ **27)** $\sqrt[4]{x}$ **28)** 10 **29)** $b^{\frac{17}{12}}$ **30)** $x^{\frac{19}{36}}$
31) $a^{-3.1}$ **32)** m^{-2} **33)** $a^{\frac{22}{15}}$ **34)** $k^{3.75}$

2.5 Komplexní čísla

V oboru reálných čísel jsme zavedli odmocňování jako „opačný“ početní výkon k umocňování. Jakákoli sudá odmocnina je však v oboru reálných čísel proveditelná pouze pro nezáporná čísla. Například $\sqrt{-4}$ v oboru reálných čísel neexistuje, neboť žádné reálné číslo umocněno na druhou není rovno mínus čtyřem. Proto nejsou v oboru reálných čísel řešitelné mnohé (i velmi jednoduché) rovnice. To je jeden (i když ne jediný) důvod proto, abychom obor reálných čísel rozšířili na obor čísel komplexních.

Jeden z důvodů konstrukce čísel reálných byl „vyplnit“ celou číselnou osu. Na této ose již není pro další čísla místo. Množina všech komplexních čísel je sestrojena jako číselná množina, kterou lze vzájemně jednoznačně zobrazit nikoli na přímku, ale na rovinu. Množina $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel je tak sestrojena jako množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel, tj. čísel z tvaru $z=[a;b]$, kde $a;b\in\mathbb{R}$ jsou reálná čísla. Je zřejmé, že čísla $a;b$ můžeme chápat jako uspořádanou dvojici souřadnic bodu v rovině (tzv. Gaussova rovina), a to v pravoúhlé souřadné soustavě, čímž je dáno vzájemně jednoznačné zobrazení mezi rovinou a množinou $\mathbb{C}$.



Uspořádané dvojice $[a;b]\in\mathbb{C}$ lze chápat také jako dvojčleny $a+b\cdot i$ (tzv. algebraický tvar komplexního čísla) a s těmito dvojčleny zacházet podle dosud známých pravidel. Základní aritmetické operace na množině $\mathbb{C}$ lze pak vysvětlit následujícím způsobem: Pro součet a rozdíl komplexních čísel tak dostaneme např.:

$$(3+2i)+(2-3i)=3+2+(2-3)i=5-i$$
$$(3+2i)-(2-3i)=3-2+(-2+3)i=1+i$$

Pro násobení a dělení musíme kromě toho přijmout pravidlo, které navíc řeší existenci odmocnin ze záporných čísel:

$$\boxed{i^2=-1}$$

Číslo i nazýváme **imaginární jednotkou**. Pro násobení tak dostáváme např.:

$$(3+2i)\cdot(2-3i)=3\cdot2+2\cdot2i-3\cdot3i-2\cdot3i^2=6+4i-9i-6\cdot(-1)=12-5i$$

Číslo $z^*=a-b\cdot i$ nazýváme **číslo komplexně sdružené** k číslu $z=a+b\cdot i$. Vynásobením dvou čísel komplexně sdružených dostaneme číslo reálné (použijeme vzorec pro rozdíl čtverců):

$$z\cdot z^*=(a+b\cdot i)\cdot(a-b\cdot i)=a^2-(b\cdot i)^2=a^2-b^2\cdot i^2=a^2-b^2\cdot(-1)=a^2+b^2$$

Právě této vlastnosti používáme při dělení komplexních čísel. Dělení přepíšeme do tvaru zlomku, který rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli, tj. např.:

$$\frac{3+2i}{2-3i}=\frac{(3+2i)\cdot(2+3i)}{(2-3i)\cdot(2+3i)}=\frac{6+4i+9i+6i^2}{2^2+3^2}=\frac{6+13i+6\cdot(-1)}{13}=\frac{6+13i-6}{13}=\frac{13i}{13}=i$$

Mocniny komplexních čísel: pro $n\in\mathbb{N}$ definujeme stejně jako v jiných číselných oborech $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\times}$; pro $z\neq 0$ je $z^0=1$ a $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$.

Příklady:

1) $(1+2i)^3=(1+2i)^3=(1+2i)^2\cdot(1+2i)=(1+4i+4i^2)\cdot(1+2i)=(-3+4i)\cdot(1+2i)=$
$=-3+4i-6i+8i^2=-11-2i$

2) $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1$; $i^8=i^4\cdot i^4=1\cdot 1=1$; $i^{2003}=i^{2000}\cdot i^3=(i^4)^{500}\cdot i^3=1^{500}\cdot i^3=i^3$

Absolutní hodnota komplexního čísla z je reálné číslo $|z|=\sqrt{z\cdot z^*}$.

3) Určeme absolutní hodnotu čísla $z=3+4i$:

$$|z|=\sqrt{z\cdot z^*}=\sqrt{(3+4i)\cdot(3-4i)}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

Geometrický význam absolutní hodnoty komplexního čísla – je analogický jako u absolutní hodnoty čísla reálného: absolutní hodnota komplexního čísla z je rovna vzdálenosti obrazu tohoto čísla v Gaussově rovině od obrazu čísla nula. Absolutní hodnotu komplexního čísla je tedy zřejmě možné určit i takto:

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Neřešené úlohy:

1) $(3-2i)(2+3i)+(1-4i)(2-i)$

2) $[(1+2i)-(4+3i)]\cdot(-i)-(4+3i)$

3) $(-2-4i)\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)+(1-2i)$

4) $\frac{2+i}{3-i}+(i-2)(4-i)$

5) $\frac{1+i}{1-2i}+\frac{i}{1+i}$

6) $\frac{2+3i}{3+4i}-\frac{3-4i}{2-3i}$

7) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$

8) $(-1+i\sqrt{3})^3-\frac{6i-4}{2-3i}$

9) $\left|\frac{-2-3i}{3-2i}\right|$

10) $\left|\frac{1-3i}{5+2i}\right|$

11) $\left|\frac{56-33i}{5+12i}\right|$

12) $\left|1+2i-\frac{2-5i}{3-i}\right|$

Výsledky:

1) $7-2i$ **2)** -5 **3)** $3+2i$ **4)** $-\frac{13}{2}+\frac{13}{2}i$ **5)** $\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i$ **6)** $\frac{684}{325}+\frac{38}{325}i$ **7)** 0 **8)** 10

9) 1 **10)** $\sqrt{\frac{10}{29}}$ **11)** 5 **12)** $\sqrt{\frac{3}{10}}$